TakiAcademy - www.takiacademy.com ★★★★★★★★★ Mathématiques ★★★★★★★★★ Prof : Abbes Amor – Lycée Pilote Monastir	Section : 4éme Sc-Exp	
	Révision Bac 2019 : Sujet n° 04	
	Durée : 3 H 00 mn	Date : 23/05/2019

EXERCICE N°1 : 4 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $z_A=-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}i\sin\theta$ et $z_B=-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}i\sin\theta$; $\theta\in]0,\pi[$

1) a) Écrire les nombres complexes sous forme exponentielle.

b) Montrer que l'affixe du point *I* milieu de $[AB]$ est réel.

2) a) Montrer que le triangle *OAB* est isocèle.

b) Prouver que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv-2\theta\ [2\pi]$. Pour quelles valeurs de θ, le triangle *OAB* est rectangle en *O* ?

c) Déterminer l'ensemble des points *M* du plan complexe d'affixes *z* vérifiant :

$$\left|z+\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{4}\right|=\left|\overline{z}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right|$$

3) On donne pour tout $n\in IN$: $V_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

a) Montrer que V_n est un réel.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $|V_n|\le\frac{1}{2^{n-1}}$, en déduire que la suite V est convergente.

EXERCICE N°2 : 3 points

Une urne contient six boules (3 noires ; 2 blanches ; 1 verte).
On lance un dé cubique homogène à 6 faces numéroté resp. : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3.

- ✓ Si on trouve « le numéro 1» on tire au hasard une boule de l'urne.
- ✓ Si on trouve « le numéro 2 » on tire au hasard successivement et sans remise deux boules.
- ✓ Si on trouve « le numéro 3 » on tire au hasard, successivement et avec remise trois boules.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :A : « Obtenir une boule verte à la fin du jeu ».

B : « Obtenir une boule verte sachant qu'on a tiré au moins deux boules de l'urne ».

2) Soit X la variable aléatoire défini par : le nombre de boules blanches obtenu à la fin du jeu.

Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE N°3 : 3 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,1), B(0,2,1) et C(1,2,0) .

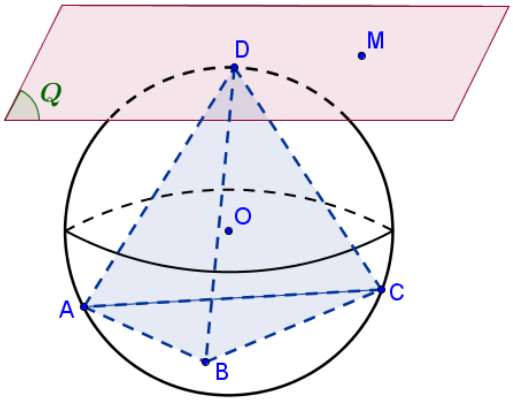
1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est :
$x+y+z-3=0$.

2) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que *A*, *B* et *C* sont des points de la sphère S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.



3) Soit le point *D* de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par *D* et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point *D*.

4) Soit *M*(*x*, *y*, *z*) un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AM}$.

b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre *MABC* est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

c) En déduire que pour tout point *M* du plan Q ; $\mathcal{V}=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

EXERCICE N°4 : 5 points

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln(x)}{x(1+\ln^2 x)}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln^3(x)+\ln^2(x)+\ln(x)-1$

a) Prouver que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]1,6;1,8[$

c) Préciser le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

2) a) Montrer que pout tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2(1+\ln^2 x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f

c) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites $x=1$, $x=e$ et $y=0$

Prouver que $A=\frac{\ln 2}{2}$(u.a) .

3) Pour tout $n\in IN$, on pose $U_n=\int_1^e\frac{\ln^{2n+1}(t)}{t(1+\ln^2(t))}dt$

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, $U_n\geq 0$

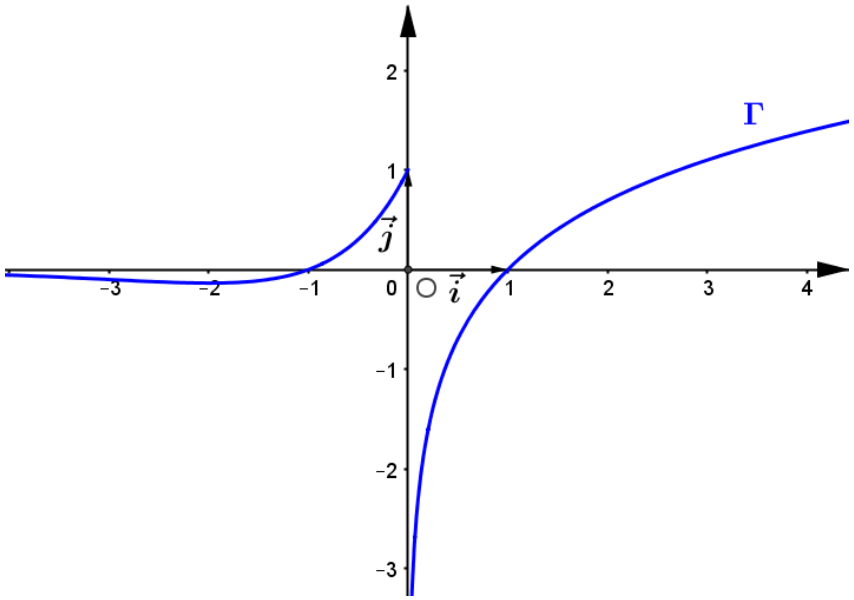
b) Montrer que (U_n) est monotone, en déduire que (U_n) est convergente.

c) Montrer que pour tout $n\in IN$, $U_n+U_{n+1}=\frac{1}{2n+2}$, en déduire U_1.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

EXERCICE N°5 : **5 points**

La courbe Γ ci-dessous représente la fonction dérivée seconde de f'' d'une fonction *f* deux fois dérivable sur *IR**. On sait que $f(0)=0$ et on désigne par *C* la courbe représentative de la fonction *f* .



1) Par lecture graphique déterminer :

a) Le signe de f''.

b) Les points d'inflexion de C_f

2) La fonction f' est définie sur IR par :

$$\begin{cases} f'(x)=xe^x & si\ x\le 0 \\ f'(x)=x\ln x-x & si\ x>0 \end{cases}$$

a) Montrer que f' est continue en 0.

b) Sans expliciter $f''(x)$, dresser le tableau de variation de f'

3) Soit *g* la restriction de f' sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que *g* réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la position relative de C_g avec la droite $\Delta : y=x$

c) Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

4) Soit *u* la suite définie sur *IN* par : $\begin{cases} u_0=0,5 \\ u_{n+1}=g^{-1}(u_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $0,5\le u_n\le e^2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

5) a) Montrer que la fonction : $H : x\mapsto \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction :

$x\mapsto x\ln x-x$

b) Soit la fonction F définie sur IR par : $F(x)=\int_0^x te^t dt$.

Montrer que pour tout $x\in IR$, $F(x)=(x-1)e^x+1$. En déduire l'expression explicite de *f* sur *IR*.

c) Dresser le tableau de variation de *f* et étudier les branche infinies de C_f .

d) Tracer C_f et ses tangentes en leurs points d'inflexion dans un nouveau repère.